Cellule de SCIENCES PHYSIQUES LDT — Tl[es] S1 ; 2
Lycée THIAROYE — cissdorosp.e-monsite.com

BASES DE LA DYNAMIQUE

La **dynamique** est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui leur sont appliquées.

I. CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

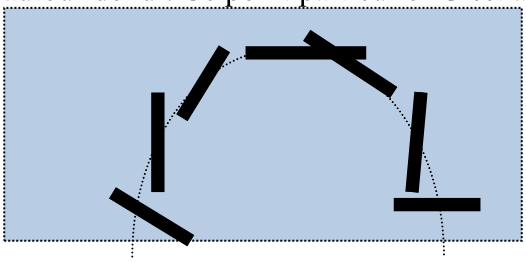
1. Mise en évidence et définition :

1.1. Mise en évidence :

On dispose d'une table soufflante et d'un solide de forme simple assez lourd. Sur le solide sont collées des pastilles en divers endroits. Posons le solide sur table, il est alors soumis uniquement à son poids $\vec{P}$ et la réaction normale $\vec{R}_N$ tel que $\vec{P}+\vec{R}_N=\vec{0}$

Le solide est soumis à des forces qui se compensent, on dit qu'il est pseudo-isolé. Un solide est dit isolé s'il n'est soumis à aucune force (idéal).Donnons une impulsion au solide avec un effet de rotation : il va jusqu'au bout de la table sans ralentir.

En observant bien le solide nous constatons que l'un de ses points se déplace en ligne droite et que tous les autres tournent autour de lui. Ce point particulier G est appelé centre d'inertie du solide.

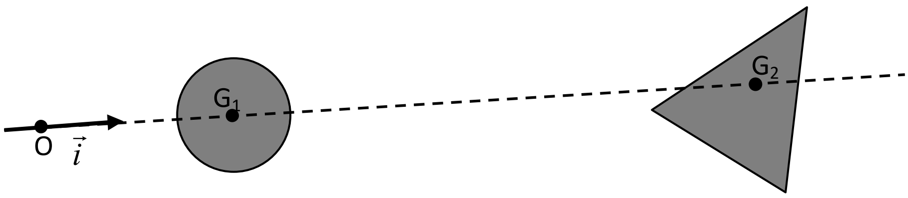


1.2. Définition :

Le centre d'inertie d'un solide est le seul point du solide qui effectue un mouvement rectiligne uniforme (M.R.U) lorsque le solide évolue en étant pseudo-isolé.

2. Relation barycentrique

Soit (S) un système constitué de deux solides (S_1) et (S_2) de masse respectives m_1 et m_2 et de centres d'inertie respectives G_1 et G_2.



Soit G, le barycentre du système $\{S_1(m_1,G_1);S_2(m_2,G_2)\}$.

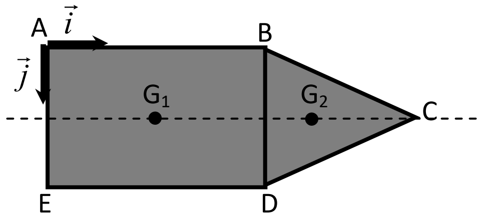
On a : $m_1\overrightarrow{GG_1}+m_2\overrightarrow{GG_2}=\vec{0}$; en introduisant le point O, il vient : $m_1\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OG_1}\right)+m_2\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OG_2}\right)=\vec{0}$,

$(m_1+m_2)\overrightarrow{GO}+m_1\overrightarrow{OG_1}+m_2\overrightarrow{OG_2}=\vec{0}$, $(m_1+m_2)\overrightarrow{OG}=m_1\overrightarrow{OG_1}+m_2\overrightarrow{OG_2}$; d'où $\boxed{\overrightarrow{OG}=\dfrac{m_1\overrightarrow{OG_1}+m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1+m_2}}$

Pour un système (S) constitué de n solides (S_i) de masses respectives m_i et de centres d'inertie G_i, son centre d'inertie G est tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OG_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}}$$

3. Application N°1



Une plaque métallique homogène a la forme ci-contre. L'épaisseur de la plaque est e et la masse volumique de la substance qui la constitue est ρ.
On donne : $AB = L = 60\ cm$; $AE = \ell = 40\ cm$; $BC = DC = d = 50\ cm$.
Déterminer la position du centre d'inertie G de la plaque.

Résolution :
Soit G_1 le centre d'inertie de la partie rectangulaire (ABDE) et G_2 celui de la partie triangulaire (BCD).
Dans le repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on a :

$$\overrightarrow{AG_1} \left| \begin{aligned} x_{G_1} &= \frac{L}{2} = 30\ cm \\ y_{G_1} &= \frac{\ell}{2} = 20\ cm \end{aligned} \right. \quad ; \quad \overrightarrow{AG_2} \left| \begin{aligned} x_{G_2} &= L + \frac{1}{3}\sqrt{d^2 - \frac{\ell^2}{4}} = 75{,}28\ cm \\ y_{G_2} &= \frac{\ell}{2} = 20\ cm \end{aligned} \right. .$$

G est le barycentre du système $\left\{\left(\left(ABDE\right), m_1\right); \left(\left(BCD\right), m_2\right)\right\}$ *avec* $\begin{cases} m_1 = \rho V_1 = \rho \times L \times \ell \times e \\ m_2 = \rho V_2 = \rho \times \dfrac{\ell}{2} \times \sqrt{d^2 - \dfrac{\ell^2}{4}} \times e \end{cases}$

Alors $m_1\overrightarrow{GG_1} + m_2\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$*, soit* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{m_1\overrightarrow{AG_1} + m_2\overrightarrow{AG_2}}{m_1 + m_2} = \dfrac{\rho L \ell e \cdot \overrightarrow{AG_1} + \rho \dfrac{\ell e}{2}\sqrt{d^2 - \dfrac{\ell^2}{4}} \cdot \overrightarrow{AG_2}}{\rho L \ell e + \rho \dfrac{\ell e}{2}\sqrt{d^2 - \dfrac{\ell^2}{4}}}$.

En simplifiant par $\rho \ell e$, il vient : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{L \cdot \overrightarrow{AG_1} + \dfrac{1}{2}\sqrt{d^2 - \dfrac{\ell^2}{4}} \cdot \overrightarrow{AG_2}}{L + \dfrac{1}{2}\sqrt{d^2 - \dfrac{\ell^2}{4}}}$;

$$\overrightarrow{AG} = \frac{L}{L + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - \frac{\ell^2}{4}}} \cdot \overrightarrow{AG_1} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - \frac{\ell^2}{4}}}{L + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - \frac{\ell^2}{4}}} \cdot \overrightarrow{AG_2}$$

$$\frac{L}{L + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - \frac{\ell^2}{4}}} = \frac{60}{60 + \frac{1}{2}\sqrt{50^2 - \frac{40^2}{4}}} = 0{,}72 \ ; \ \frac{\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - \frac{\ell^2}{4}}}{L + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - \frac{\ell^2}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{50^2 - \frac{40^2}{4}}}{60 + \frac{1}{2}\sqrt{50^2 - \frac{40^2}{4}}} = 0{,}28.$$

$$\overrightarrow{AG} = 0{,}72 \cdot \overrightarrow{AG_1} + 0{,}28 \cdot \overrightarrow{AG_2}$$

$$\begin{cases} x_G = 0{,}72 x_{G_1} + 0{,}28 x_{G_2} = 0{,}72 \times 30 + 0{,}28 \times 75{,}28 \\ y_G = 0{,}72 y_{G_1} + 0{,}28 y_{G_2} = 0{,}72 \times 20 + 0{,}28 \times 20 \end{cases}.$$

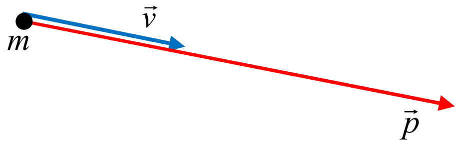
Les coordonnées du centre d'inertie G de plaque sont : $\boxed{\begin{cases} x_G = 42,28\ cm \\ y_G = 20\ cm \end{cases}}$

I. QUANTITE DE MOUVEMENT

1. Quantité de mouvement d'un point matériel

Soit un point matériel de masse m animé de vitesse $\vec{v}$. On définit le vecteur quantité de mouvement de ce point matériel par la relation :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$



Le vecteur quantité de mouvement est colinéaire et de sens au vecteur vitesse $\vec{v}$.
Sa norme s'écrit : $p = mv$.
L'unité de quantité de mouvement est le kilogramme mètre par seconde $\left(kg.m.s^{-1}\right)$.

2. Quantité de mouvement d'un solide

Considérons un solide (S) constitué de points matériels respectivement de masses m_i, de vecteurs vitesse $\vec{v}_i$ et donc de vecteurs quantité de mouvement $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$.
Le vecteur quantité de mouvement du solide (S) est égale à la somme des vecteurs quantité de mouvement de l'ensemble des points matériel qui le constituent : $\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i\vec{v}_i$.

D'après la relation barycentrique, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum m_i\overrightarrow{OG_i}}{\sum m_i} \Rightarrow \left(\sum m_i\right)\times\overrightarrow{OG} = \sum m_i\overrightarrow{OG_i}$.

$\sum m_i = M$, masse totale du solide (S) ; donc $\sum m_i\overrightarrow{OG_i} = M\times\overrightarrow{OG}$ (1).
Dérivons la relation (1) par rapport au temps.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_i\overrightarrow{OG_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(M\times\overrightarrow{OG}\right)$$
$$\sum\frac{d}{dt}\left(m_i\overrightarrow{OG_i}\right) = M\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}$$
$$\sum m_i\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG_i} = M\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}$$

On a
$\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{OG_i} = \vec{v}_i$, vecteur vitesse du point matériel i et $\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{OG} = \vec{v}_G$, vecteur vitesse du centre d'inertie du solide.

Soit $\sum m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_G$; d'où $\boxed{\vec{p} = M\vec{v}_G}$

La quantité de mouvement d'un système de points matériels à une date t est celle du centre d'inertie du système supposé porteur de toute la masse.

3. Application N°2 :

Une locomotive de masse m_1= 20tonnes animée d'une vitesse V_1=5ms^{-1} heurte un wagon au repos de mass m_2= 25tonnes. Les deux engins reste accrochés après le choc.

1) Calculer la vitesse commune V' de l'ensemble après le choc.

2) Calculer la perte d'énergie cinétique du système suite au choc.

Résolution :

1) la quantité de mouvement du système constituée par l'ensemble (locomotive -wagon) se conserve au cours du choc. Donc on a :

$$m_1V_1 = (m_1 + m_2)V' \Rightarrow V' = \frac{m_1V}{m_1 + m_2} = 2,22ms^{-1}$$

2) Perte d'énergie cinétique

$$-\Delta Ec = \frac{1}{2}m_1V_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V'^2 = 139KJ$$

II. LES LOIS DE NEWTON

1. Enoncés :

Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie du centre d'inertie d'un solide isolé ou pseudo-isolé est un mouvement rectiligne uniforme.

1.1. Première loi de Newton : principe de l'inertie

Lorsqu'un solide est isolé ou pseudo-isolé, son centre d'inertie G est :

- Soit au repos (si G est initialement au repos $\vec{v}_G = \vec{0}$)
- Soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme ; $\vec{v}_G$ est un vecteur constant

1.2. Deuxième loi de Newton (principe fondamentale de la dynamique)

La somme vectorielle des forces s'exerçants sur un solide est égale à chaque instant à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du solide

$$\boxed{\sum_1^n \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}\right)}$$

1.3. Théorème du centre d'inertie :

Dans la relation précédente, la quantité de mouvement du solide s'écrit : $\vec{P} = m\vec{V}_G$ avec m la masse du solide et $\vec{V}_G$ représente la vitesse du centre de gravité du solide. Supposons que la masse m est constante .La relation précédente devient :

$\sum_1^n \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}\right) = m\frac{d}{dt}(\vec{V}_G) = m \times \vec{a}_G$ ou $\vec{a}_G$ est l'accélération du centre de gravité du solide

On obtient finalement :

$$\boxed{\sum_1^n \vec{F} = m \times \vec{a}_G}$$

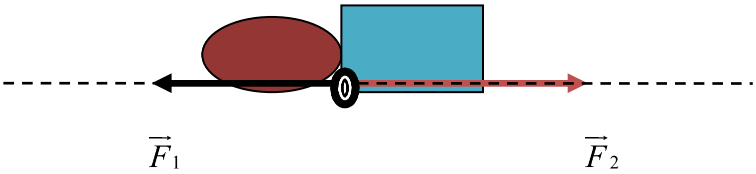
Cette relation constitue le théorème du centre d'inertie. Elle permet à partir de l'inventaire des forces qui s'exercent sur un système de prévoir le mouvement du centre de gravité de ce système.

1.4. Troisième loi de Newton (ou loi des actions réciproques)

Lorsqu'un solide (S_1) exerce sur un solide (S_2) une action mécanique représentée par une force $\vec{F}_1$, le solide (S_2) exerce aussi une action mécanique représentée par une force $\vec{F}_2$ .Ces forces ont la même droite d'action, des sens opposés et la même norme. On note

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}}$$

Exemple :



2. Domaine de validité des lois de Newton :

Les lois de Newton ne sont valables que par rapport à des repères privilégiés appelés repères galiléens.

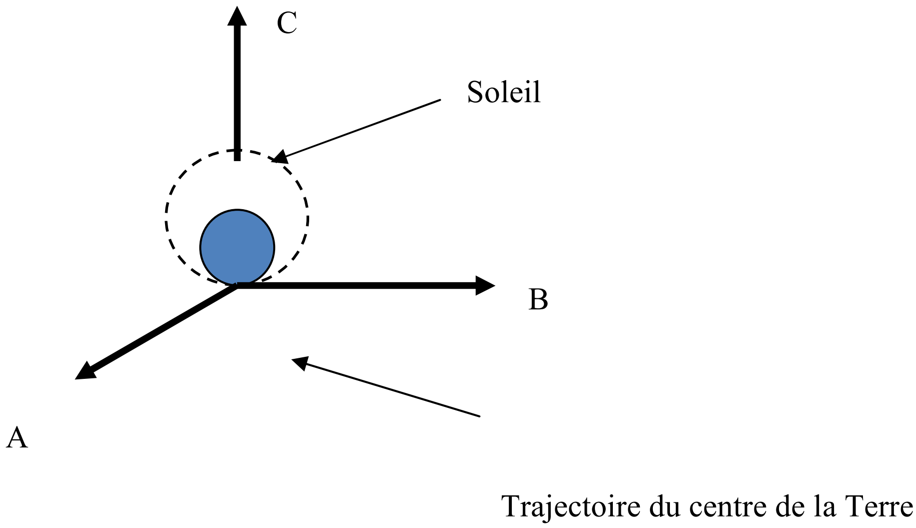
Un référentiel galiléen est un référentiel pour lequel l'espace est homogène et isotrope, le temps uniforme et dans lequel tout corps libre (non influencé par une force) est animé d'un mouvement rectiligne uniforme ; l'immobilité étant un cas particulier.

3. Rappels sur les exemples de référentiels galiléens :

3.1. Repère de Copernic ou repère Héliocentrique :

Pour étudier le mouvement de la Terre et ceux des autres planètes autour du soleil, nous utilisons le soleil comme corps de référence. Un repère d'espace du référentiel de Copernic a pour origine le centre d'inertie du système solaire, les trois axes étant dirigés vers des étoiles fixes A , B et C.

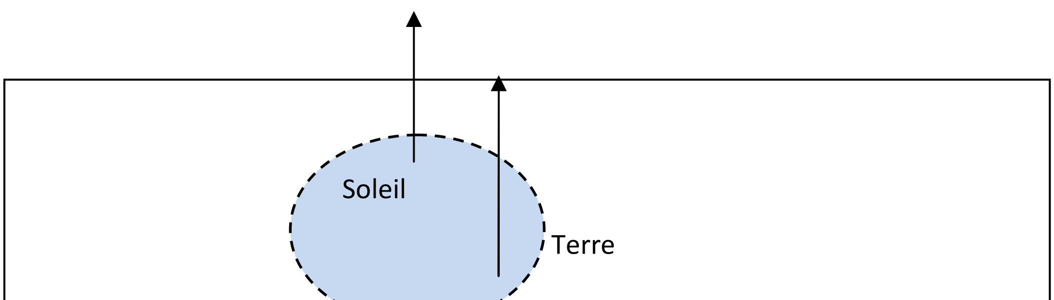
Exemple :

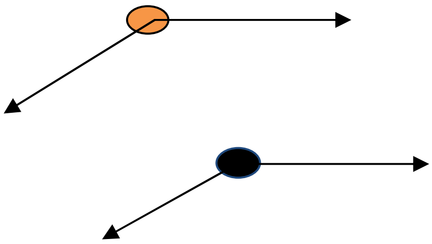


3.2. Repère géocentrique :

Pour étudier le mouvement de la lune autour de la Terre ou celui d'un satellite artificiel de la Terre, le corps de référence sera la Terre. Un repère d'espace du référentiel géocentrique a pour origine le centre O de la Terre et les trois axes dirigés trois étoiles du référentiel de Copernic.

Exemple :





3.3. Répere terrestre ou de laboratoire :

Un repère terrestre est lié à la terre et est entrainé par cette dernière dans son mouvement de rotation sur elle-même. En toute rigueur ; un repère terrestre n'est pas galiléen mais pour des mouvements de courtes durées et les expériences n'ont pas une très grande précision, on peut assimiler ce repère à un repère galiléen.

III. LES AUTRES THÉOREMES UTILISÉS

1. Théorème de l'accélération angulaire :

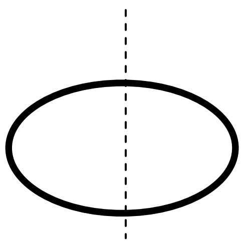
Le théorème de l'accélération angulaire s'inscrit comme suit : $\boxed{\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}}$

et J_{Δ} est le moment d'inertie du solide

Rappel sur les expressions des moments d'inerties de quelques solides :

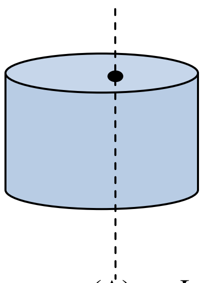
NB : Dans les exemples ci-dessous l'axe de rotation passe par le centre de gravité du solide

- Cerceau ou circonférence pesante de masse M tournant autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à son plan et passant par son centre O.



(Δ) $J_{\Delta} = MR^2$

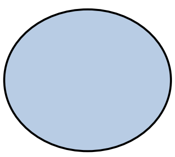
-cylindre plein homogène (ou disque homogène) de masse M, de rayon R tournant autour de son axe de révolution.



(Δ) $J_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2$

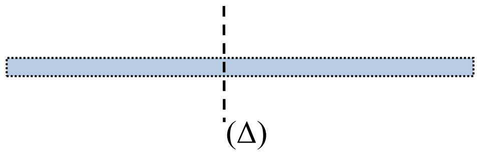
- sphère pleine homogène de masse M, de rayon R, tournant autour d'un axe confondu avec un diamètre.

(Δ)



$$J_{\Delta} = \frac{2}{5}MR^2$$

- tige homogène de masse M, de longueur l tournant autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à la tige en son milieu.

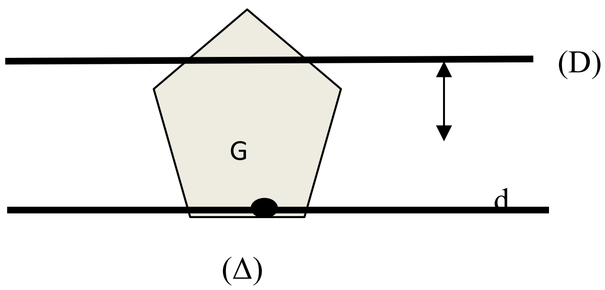


$$J_{\Delta} = \frac{1}{12}Ml^2$$

2. **<u>Théorème de Huygens :</u>**

Le moment d'inertie d'un solide de masse M par rapport à un axe (D) est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) parallèle à (D) et passant par son centre de gravité augmenté du produit Md^2 .d est la distance entre les deux axes

On note : $\boxed{\mathbf{J_{(D)} = J_{(\Delta)} + Md^2}}$



3. **<u>Théorème de l'énergie cinétique :</u>**

La variation ΔEc de l'énergie cinétique d'un système matériel entre deux instants quelconques est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces appliquées à ce système entre ces deux instants. On note

$$\boxed{\Delta Ec = Ec_f - Ec_i = \sum W(\vec{F})}$$

Ce théorème est général et peut être appliqué à plusieurs types de mouvements : translation, rotation autour d'un axe fixe, translation et rotations combinées.

4. **<u>Application N°3 :</u>**

Une tige AB de longueur l, de masse m est mobile autour d'un axe horizontal (Δ) passant par l'extrémité A. On l'écarte de sa position d'équilibre d'un angle α puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

1) Calculer le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation
2) Calculer la vitesse angulaire ω de la tige au moment où elle passe par la verticale

Données : m= 500g ; l=80cm et α =70°

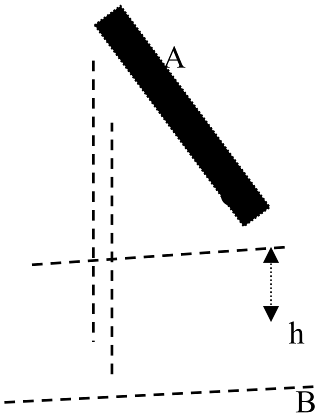
<u>Résolution :</u>

1) Le théorème de Huygens donne :

$$J_\Delta = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

2) Le théorème de l'énergie cinétique appliquée à la tige entre l'instant où elle est abandonnée et l'instant où elle passe par sa position d'équilibre donne :

$$\frac{1}{2}J_\Delta \omega^2 = mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgl(1-\cos\alpha)}{J_\Delta}}$$



EVALUATION

Exercice 1 :

Un solide S1 de masse m1 = 100g initialement au repos peut coulisser sans frottement sur un banc à coussin d'air horizontal. Un autre solide S2 de masse m2=200g est protégé sur le banc à la vitesse V2= 0,2ms^{-1}

1) Le choc est élastique
   1.1.Enoncer les lois de conservations
   1.2.Déterminer les vecteurs vitesses des deux mobiles après le choc
2) Le choc est élastique
   2.1. Enoncer les lois de conservation
   2.2. Calculer la vitesse de l'ensemble après le choc

Exercice 2 :

Un fusé à décollage vertical a une masse au sol mo dont 80% de gaz. Elle décolle à la date to = os ;la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée est W, le débit d

Gaz est constant et égal à μ

1) En appliquant le théorème du centre d'inertie à la fusée et à une date t, exprimer l'accélération a du mouvement.
2) Tracer la courbe qui donne les variations de l'accélération en fonction du temps

Données : μ =100kgs^{-1} W= 2400ms^{-1} mo = 15 tonnes