Cellule de SCIENCES PHYSIQUES LDT

Lycée THIAROYE

Tl^{es} S1 ; 2

cissdorosp.e-monsite.com

OSCILLATIONS MECANIQUES LIBRES

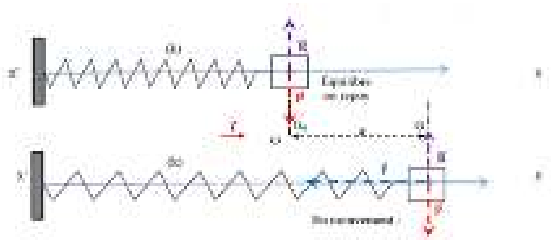
I- Oscillations mécaniques libres non amorties : Etude du pendule élastique horizontal :

I-1-Etude dynamique :

On considère un ressort de masse négligeable dont l'une des extrémités est fixée sur une table disposée horizontalement, l'autre extrémité fixée sur un solide (S) de masse m.

Le solide (S) peut glisser sans frottement sur la table, on l'écarte d'une distance x par rapport à sa position d'équilibre initiale puis on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale, le solide oscille de part et d'autre de cette position d'équilibre.

La position de son centre d'inertie G_o à un instant t est désignée par x(t).



I- 1-1-Equation différentielle

- Système : Solide de masse m
- Référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P}: \text{le poids du solide} \\ \vec{R}: \text{reaction de table sur le solide} \\ \vec{T}: \text{tension du ressort} \end{cases}$

L'application Théorème du centre d'inertie donne:

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{T}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$$

La projection de cette relation vectorielle suivant l'axe (xx') donne :

$0 + 0 - \mathrm{kx} = \mathrm{ma}$ or $\mathrm{a} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}}$ ce qui donne: $-\mathbf{kx} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}$

ou encore : $\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (1)

Cette relation traduit l'équation différentielle régissant le mouvement du solide de masse m.

I-1-2- Solution de l'équation différentielle

La solution de cette équation différentielle $\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ peut se mettre sous la forme: $\boldsymbol{x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$

avec X_m , ω_0 *et* φ *sont des constantes* .

Détermination de ces *constantes*:

On a : La vitesse $\dot{x} = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

L'accélération $\ddot{x} = -X_m\ \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ *ce qui donne* : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Par identification à l'équation (1)

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, nous avons : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

❖ $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ est appelée la pulsation propre de l'oscillateur.

Elle s'exprime ***(rad/s)*.La** période propre $\boldsymbol{T_0}$ et la fréquence propre $\boldsymbol{f_0}$ sont données par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{et} \qquad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

☞ $\boldsymbol{T_0}$ **est la durée d'une oscillation libre complète.** Elle s'exprime en seconde (s) dans le (SI)

☞ $\boldsymbol{f_0}$ **correspond au nombre de périodes par seconde**. Elle se mesure en hertz (Hz) dans le (SI).

❖ Cependant X_m (m) l'amplitude maximale des oscillations
$\boldsymbol{\varphi}$ $(\boldsymbol{rad})$: $\boldsymbol{phase}$ à $\boldsymbol{l'origine\ des\ dates}$ $(\boldsymbol{t = 0})$ et dépendent des conditions initiales (position initial ; vitesse initiale)

☞ **Détermination de $\boldsymbol{X_m}$ et $\boldsymbol{\varphi}$**

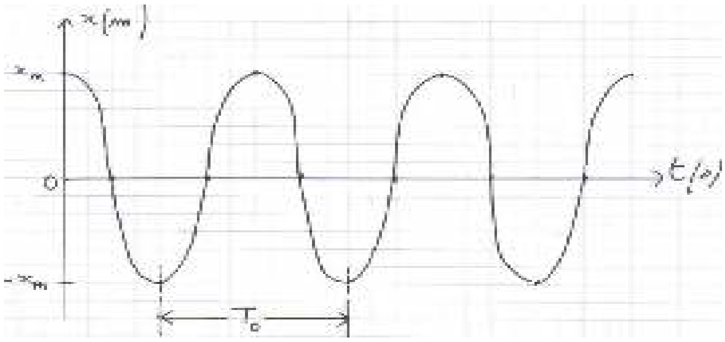
Si à t =0 : $\begin{cases} x = X_m \\ \text{et} \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$ alors on a donc : $\begin{cases} x(t=0) = X_m = X_m \cos\varphi \ ; \quad \text{(a)} \\ \text{et} \\ \dot{x}(t=0) = -X_m\,\omega_0 \sin\varphi = 0\ ; \quad (b) \end{cases}$

$$d'apres(b) \Longrightarrow \sin\varphi = 0 \Longrightarrow \quad \varphi = 0 \quad ou \quad \varphi = \pi$$

Or pour $X_m \geq 0$ $\quad alors \quad \varphi = 0$

L'équation du mouvement devient **:** $\boldsymbol{x = X_m \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t}$

I-2-3:Représentation graphique des variations de l'élongation x



La forme de la courbe montre la nature sinusoïdale des oscillations. Elles s'effectuent à amplitude constante, elles sont donc non amorties.

Remarque :

- $\boldsymbol{\dot{x} = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)}$

Comme $-1 \leq \sin\theta \leq +1$, on a: $-X_m\omega_0 \leq \dot{x} \leq +X_m\omega_0$

Donc : $\mathbf{\dot{x}_{max} = v_{max}} = \boldsymbol{X_m.\omega_0}$

- De la même manière : $\ddot{x} = \boldsymbol{-X_m\ \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)}$

Comme $-1 \leq \cos\theta \leq +1$, on a: $-X_m{\omega_0}^2 \leq \ddot{x} \leq +X_m{\omega_0}^2$

Donc : $\boldsymbol{\ddot{x}_{max} = a_{max} = -X_m\ \omega_0^2}$

. L'accélération $a = -X_m\ \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2.[X_m\ \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)]$

On obtient : $a = -\omega_0^2.x$

De même on retrouve : $\boldsymbol{a_{max} = -\omega_0^2.x_{max}}$

I-2- L'étude énergétique :

I-2-1- conservation de l'énergie mécanique :

❖ Système : (solide de masse m + ressort)

- **L'énergie potentielle** de l'oscillateur sinusoïdal en translation est : $E_P = E_{PP} + E_{Pel}$

-Soit le plan horizontal l'état de référence des énergies potentielles de pesanteur $\Longrightarrow$ $E_{PP} = 0J$

- soit le point d'abscisse $x = 0$, l'état de référence des énergies potentielles élastiques $\Longrightarrow$ $E_{Pel} = \frac{1}{2}Kx^2$

Donc : $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k[X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2$

$$= \frac{1}{2} kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- **Son énergie cinétique est :**

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{or} \quad v^2 = \dot{x}^2 = X_m^2\omega_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} mX_m^2\omega_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

- son énergie mécanique est :

$$\boldsymbol{E_M = E_c + E_p}$$

$$E_M = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Or $k = \omega_0^2 m$ *alors* :

$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{1}{2}kX_m^2$$

$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2$ or $kX_m^2 = mV_m^2$ ce qui donne aussi : $E_m = \frac{1}{2} mV_m^2$

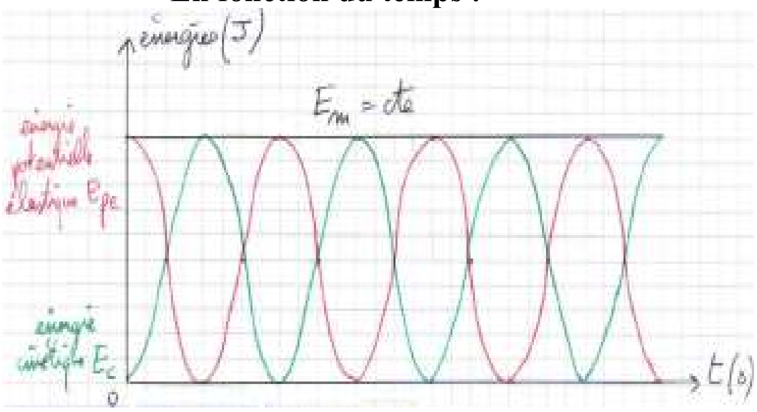
$\boldsymbol{k, X_m^2, m \; et \; V_m^2}$ **sont des constantes d'où**

$$\boldsymbol{E_m = constante}$$

On a une énergie mécanique constante au cours du temps donc l'oscillateur élastique horizontale non amorti est un système conservatif.

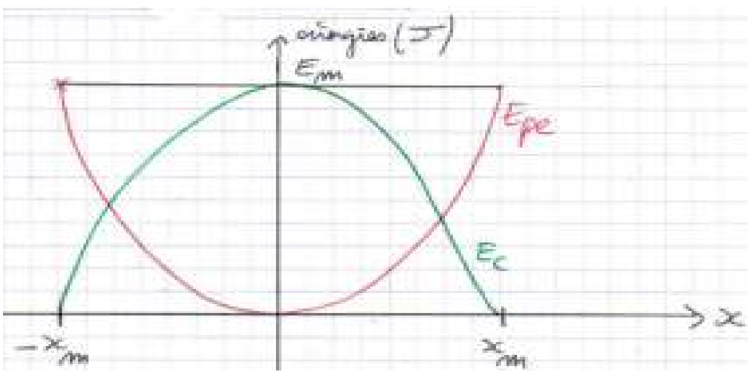
I-2-2-Diagramme d'évolution des énergies :

☞ **En fonction du temps :**



Au cours d'une oscillation, il y a conversion réciproque de l'énergie cinétique en énergie potentielle élastique, et réciproquement.

☞ **En fonction de l'élongation X :**



On remarque l'énergie mécanique constante, est exclusivement cinétique au passage à la position d'équilibre où la vitesse est alors maximal**e** $(\boldsymbol{v = V_m}$ *où* $\boldsymbol{x = 0})$ **.**Elle devient exclusivement potentielle élastique aux extrema du mouvement, où la vitesse est nulle.

I-2-3- Détermination de l'équation différentielle par la méthode énergétique :

On a : $E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

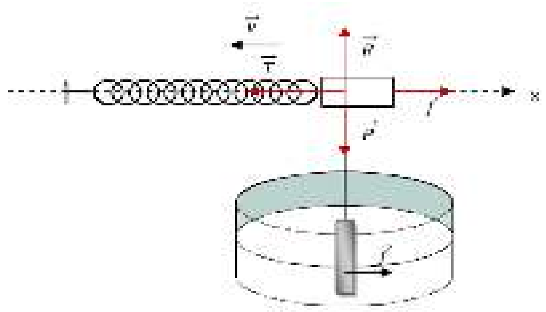
Or le système est conservatif : $\frac{dE_M}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \Rightarrow$ $m v\dot{v} + kx\dot{x} = 0$ $\Rightarrow$ avec $\dot{v} = \ddot{x}$ et $\dot{x} = v$

Ce qui donne : $m v\ddot{x} + kxv = 0 \Rightarrow (m\ddot{x} + kx)v = 0$ où $v \neq 0$

Finalement **:** $\boldsymbol{m\ddot{x} + kx = 0}$ $\Rightarrow$ **d'où** l'équation différentielle régissant le mouvement du solide de masse m.

II- OSCILLATIONS MECANIQUES AMORTIES :

On met en contact le pendule étudié ci-haut avec un fluide comme l'indique la figure ci-dessous :



Le fluide exerce sur le pendule des frottements de résultante

$\vec{f} = -h\vec{v}$ (ou h est une constante qui désigne le coefficient de frottement).

II.1 Equation différentielle :

- Système : Solide de masse m+ plaque plongeant dans le fluide
- Référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P}\text{: le poids du solide} \\ \vec{R}\text{: reaction de la table sur le solide} \\ \vec{T}\text{: tension du ressort} \\ \vec{f}\text{: force de frottement} \end{cases}$

L'application Théorème du centre d'inertie donne:

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{T}} + \vec{f} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$$

La projection de cette relation vectorielle suivant l'axe (xx') donne :

$$0 + 0 - kx - hv = ma \quad \text{or } a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \text{et } v = \dot{x}$$

Ce quidonne: $-Kx - hV = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + hV + Kx = 0$

ou encore : $\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$

Equation différentielle sans second ordre sans second membre qui régit le mouvement des oscillations amorties.

II-2- Solution de l'équation différentielle :

Cette équation $\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ admet pour solution :

$x = X_m e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$ avec

$$\begin{cases} X_m e^{-\lambda t} : amplitude\ du\ mouvement \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} : \text{pseudopulsation} \\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} : \text{la pseudoperiode} \end{cases} , \quad 2\lambda = \frac{h}{m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On constate que :

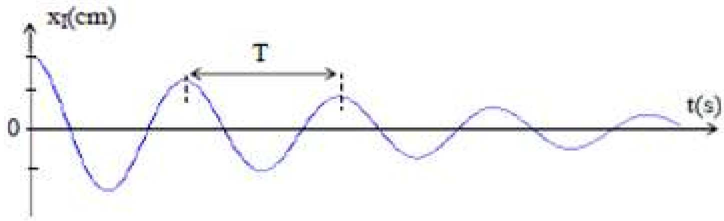
$\omega < \omega_0 \Longrightarrow$ T (la pseudoperiode) $>T_0$(periode propre)

finalement on peut écrire : $\mathbf{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 = 0}$

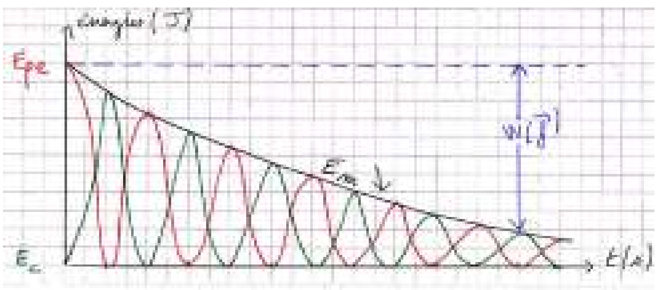
La résolution de cette équation conduit à trois régimes selon la valeur des forces de frottement :

- ✓ Si les amortissements sont faibles **,** l'amplitude du mouvement décroit progressivement au cours du temps, on dit que le régime est pseudopériodique.

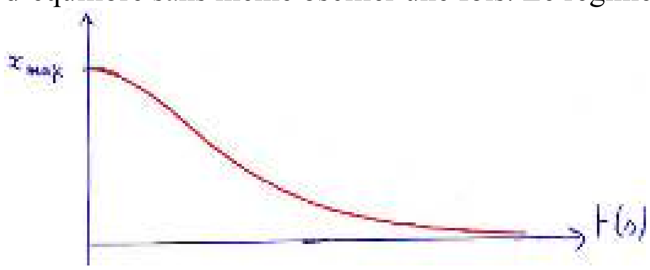
  Dans ce cas : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ **et** $\mathbf{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}}$



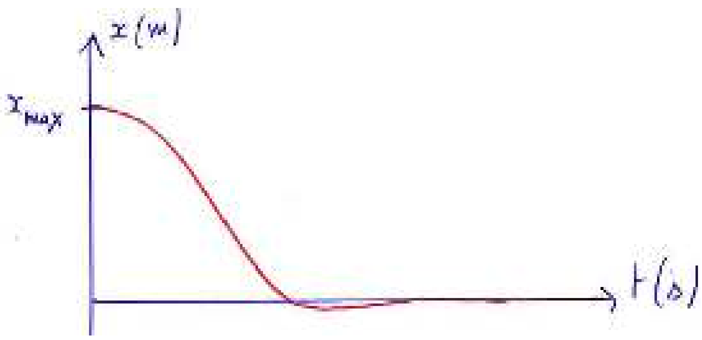
Aspect énergétique :



- ✓ Si les amortissements sont importantes **,** il n'y a pas d'oscillations, le solide revient à sa position d'équilibre sans même osciller une fois. Le régime est dit **apériodique**.



Remarque : il existe un régime intermédiaire entre le régime pseudopériodique et le régime apériodique, appelé **régime critique**. Ce dernier correspond à la durée la plus courte pour que le système revienne à l'équilibre sans osciller.



II-3-La non conservation de l'énergie mécanique pour les oscillations mécaniques amorties :

Considérons deux instants différents (t et t + dt) où l'énergie mécanique totale ($E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$) a varié de dE_M . On a $\frac{dE_M}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\frac{dx}{dt}$ en simplifiant dt, on obtient : $dE_M = (m\ddot{x} + kx)dx \Longrightarrow$ (1)

l'équation différentielle $m\ddot{\mathbf{x}} + h\dot{\mathbf{x}} + Kx = \mathbf{0} \Longrightarrow$

$m\ddot{\mathbf{x}} + Kx = -h\dot{\mathbf{x}}$

donc l'équation (1) devient: $dE_M = -h\dot{x}dx$ or $f = hv = h\dot{x}$

ce qui donne : $dE_M = -fdx$ or $-fdx = dw(\vec{f})$

Finalement : $|\Delta E_M = w(\vec{f})|$

Conclusion : En présence de frottements, il n'y a plus conservation de l'énergie mécanique. La variation de l'énergie mécanique est égale au travail de la force de frottement dans un intervalle de temps donné.

III- ANALOGIE GRANDEURS ELECTRIQUES ET GRANDEURS MECANIQUES

Systèmes	**électrique**	**mécanique**
Equations différentielles	$L\frac{d^2q}{dt^2} + Req\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$	$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + Kx = 0$
correspondances	L (inductance) ⟷ q(t)(charge) ⟷ Req (résistance) ⟷ 1/C(inverse capacité) ⟷ Rc(résistance critique) ⟷	m (masse) X(t) λ k λc

IV- Applications

Les oscillations mécaniques libres non amorties et amorties trouvent d'importantes applications dans la vie. Parmi ces applications nous pouvons citer les amortisseurs des véhicules, le galvanomètre balistique, le mouvement d'un flotteur

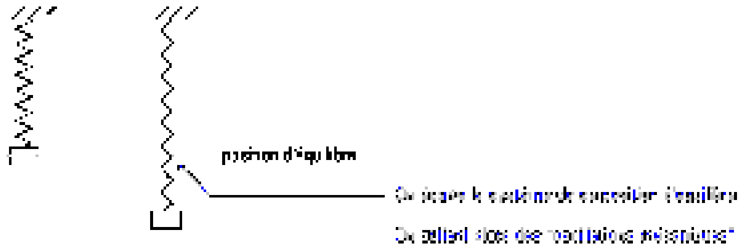
EVALUATION :

- **EXERCICE 1** :

A l'extrémité d'un ressort de masse négligeable, de raideur K = 26 N/m, on fixe un solide de masse m = 0,178 kg.

1) Trouver à l'équilibre l'allongement du ressort.
2) On abaisse verticalement la masse m de 3 cm puis on lâche à la date 0 sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
   Ecrire l'équation horaire du mouvement.
3) On considère le système (terre-pendule). Lorsque le solide se trouve à l'abscisse x = 1,5 cm, calculer :
   a) L'énergie cinétique du solide.
   b) L'énergie potentielle élastique du pendule en prenant comme référence le ressort détendu (ni allongé, ni comprimé).

c) L'énergie potentielle de pesanteur du système (l'énergie potentielle de pesanteur du système est nul



lorsque le ressort est détendu).

Exercice2 :

Un corps de masse m forme un anneau autour d'une tige horizontale x'x sur laquelle il peut se déplacer. Un ressort de raideur k, placé autour de la tige, est fixé à celle-ci par une de ses extrémités et, par l'autre, au corps de masse m. Soit 0 la position du centre d'inertie du corps à l'équilibre. Il existe des frottements. On admettra qu'ils se réduisent à une force $\vec{f} = - h\ \vec{V}$ où $\vec{V}$ désigne la vitesse instantanée du corps de masse m. Le coefficient h est positif.

1)- Etablir l'équation différentielle caractéristique du mouvement du corps.

2)- Quelle est la nature de ce mouvement? Donner l'allure de x (t) selon la valeur du coefficient d'amortissement.

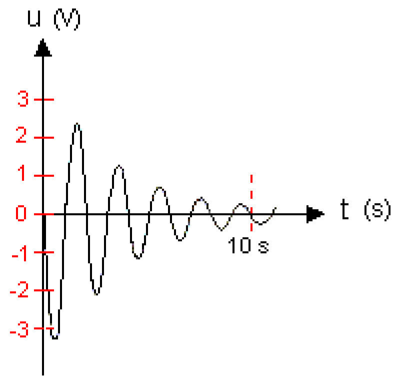
3)- Energie de l'oscillateur.

a) Donner l'expression de l'énergie mécanique de l'oscillateur.

b) Etablir la relation entre la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps et la puissance de la force de frottement.

c) Commenter cette relation en termes de transferts d'énergie.

4- A l'aide d'une interface reliée à un ordinateur. on a relevé une tension u proportionnelle à x(t) .



L'ordinateur est programmé de telle sorte qu'à 1 volt corresponde 1 cm.

A partir du graphique ci-dessus :

a) Déterminer les conditions initiales imposées à cet oscillateur.

b) Calculer la pseudo-période