Cellule de SCIENCES PHYSIQUES LDT

Lycée THIAROYE

Tl^{es} S1 ; 2

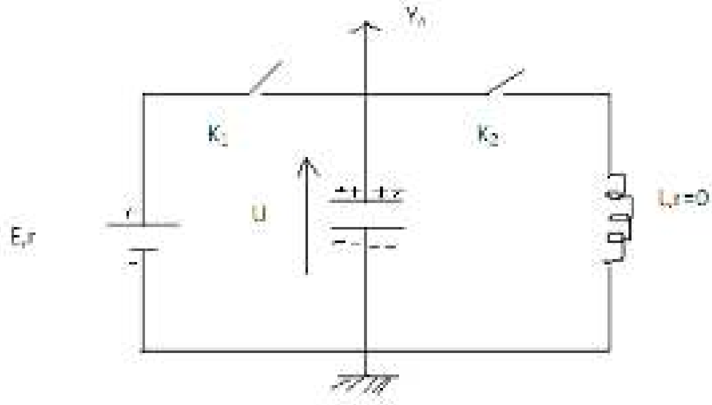
cissdorosp.e-monsite.com

Oscillations électriques libres non amorties et amorties :

1-1. Oscillations électriques libre non amorties :

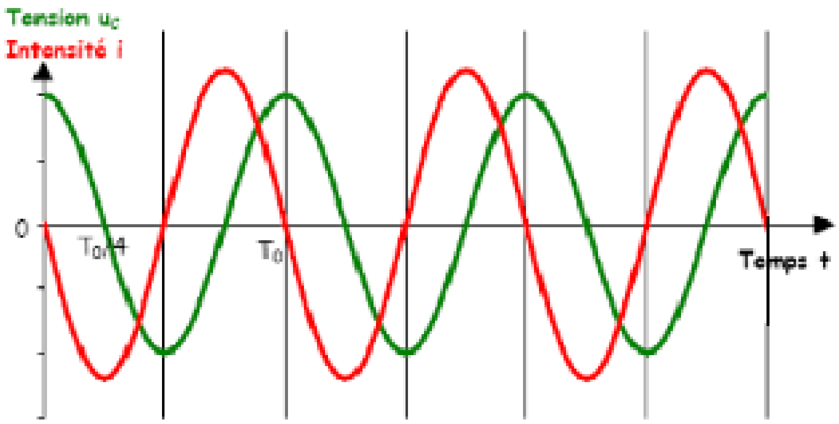
1-1-1. Décharge libre d'un condensateur dans une bobine non résistive :

1-1-1-1. Montage expérimentale :



1-1-1-2. Observation :

- En fermant l'interrupteur K_1 tout en laissant K_2 ouvert, le condensateur se charge.
- Pour réaliser la décharge du condensateur dans la bobine on ouvre K_1 et on ferme K_2.
- Ainsi l'oscillogramme ci-dessous montre les variations de i et de la tension U aux bornes du condensateur.



1-1-1-3. Interprétation :

Lorsque le condensateur est chargé, il a tendance à se décharger dans la bobine. Il y a circulation dans le circuit d'un courant d'intensité croissante et naissance d'un phénomène d'auto-induction.

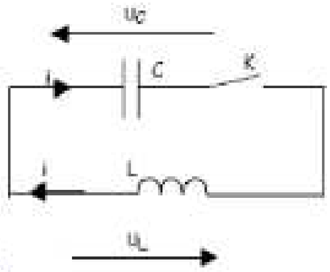
Après décharge complète du condensateur, un courant induit charge à nouveau le condensateur en sens inverse qui se charge à nouveau et ainsi de suite : Le circuit oscille.

1-1-1-4. Conclusion :

Dans un circuit (L ,C) idéal, l'intensité i du courant, la charge q du condensateur, la tension U au bornes du condensateur varient « sinusoïdalement », leurs amplitudes restant constantes.

Nous avons des oscillations électriques non amorties.

1-1-2. Equation différentielle par méthode électrique :



Condition initiale : A t = 0 , on ferme K.

- l'énergie est stockée dans le condensateur $u_C(0) = U_0$ (>0)
- il n'y a pas d'énergie dans la bobine $i(0) = 0$

On choisit un sens positif (i). La loi des mailles donne : $u_C + u_L = 0$

Avec $i = \frac{dq}{dt}$, $u_L = L\frac{di}{dt}$ et $q = Cu_c$ on obtient: $\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0}$ (équation différentielle du second ordre sans terme du premier)

La solution est de la forme: $\boxed{u_c = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi)}$: on a des oscillations sinusoïdales avec:

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ pulsation propre du circuit
- T_0: période des oscillations
- U_0: amplitude
- φ: phase initiale, dépend des conditions initiales.

Si on dérive deux fois on obtient: $\frac{d^2u_c}{dt^2} = -U_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 u_c$. D'après l'équation différentielle on obtient: $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$

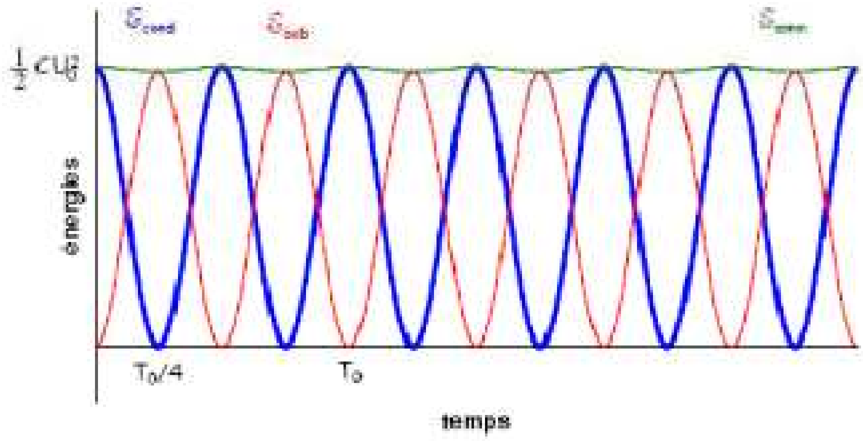
D'après la condition initiale on obtient $\varphi = 0$

1-1-3. <u>Aspect énergétique :</u>

A un instant quelconque t , l'énergie emmagasinée

- dans le condensateur est: $\mathcal{E}_{cond} = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}CU_0^2\cos^2\omega_0 t$
- dans la bobine est : $\mathcal{E}_{bob} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LC^2U_0^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}CU_0^2\sin^2\omega_0 t$

Donc l'énergie totale emmagasinée est: $\boxed{\mathcal{E}_{emm} = \frac{1}{2}CU_0^2}$. Indépendante du temps elle est donc constante.



Remarque : les courbes ont pour période $\frac{T_0}{2}$

Au cours des oscillations l'énergie totale se conserve. Il y a transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement.

Lorsque l'énergie dans la bobine est maximale, celle dans le condensateur est nulle et inversement.

1-1-4. Equation différentielle par méthode énergétique :

$$E_T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = 0 = \frac{1}{2}L\frac{di^2}{dt} + \frac{1}{2C}\frac{dq^2}{dt} \Rightarrow i\left(L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

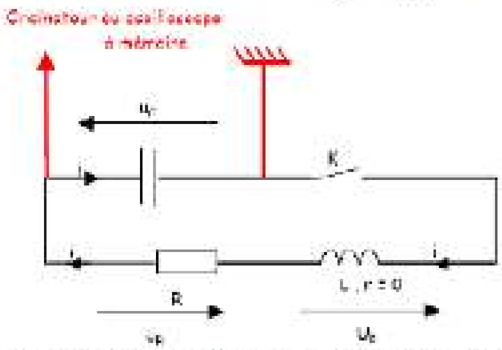
$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

1-2. Oscillations électrique libres amorties :

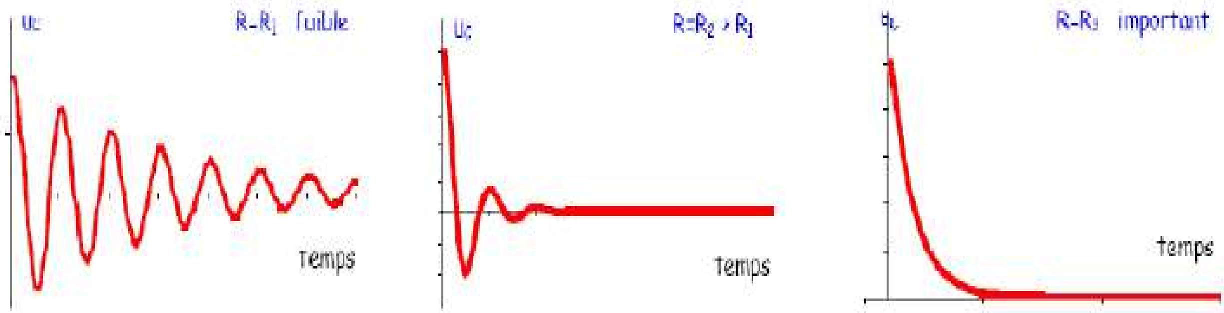
1-2-1. Décharge libre amortie d'un condensateur dans une bobine résistive :

1-2-1-1. Montage expérimentale :

A t = 0 on ferme l'interrupteur K, le condensateur est chargé : $u_C(0) = U > 0$



On enregistre la tension u_C aux bornes du condensateur, pour différentes valeurs de la résistance R. (R_1, R_2, R_3)
Les courbes obtenues sont représentées ci-dessous



courbe1

courbe2 courbe3

1-2-1-2. <u>Observation :</u>

- Faible résistance : oscillation amorties
- Plus la résistance est importante plus l'amortissement est important.
- Si la résistance dépasse une certaine valeur il n'y a plus d'oscillations.

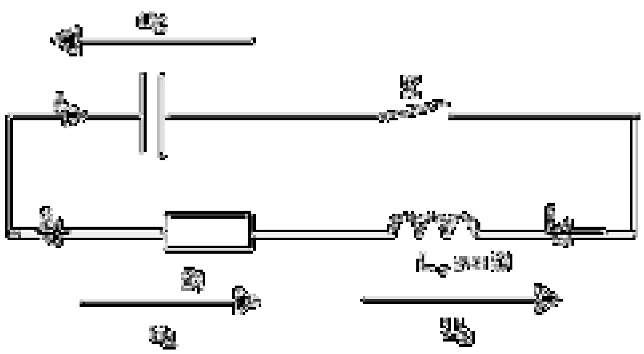
1-2-1-3. <u>Interprétation :</u>

- Si R est faible l'oscillogramme obtenu montre que les maxima relatifs sont équidistants mais diminuent au cours du temps : oscillations légèrement amorties ; la décharge est dite pseudopériodique (courbe 1).
- Si R augmente, nous obtenons des oscillations de plus en plus amorties. Si nous continuons d'augmenter R, nous constatons qu'au-delà d'une certaine valeur R_c il n'y a plus d'oscillations, la tension tend lentement vers zéro : la décharge du condensateur est apériodique. (courbe 2)
- Pour une valeur particulière $R=R_c$ la tension s'annule rapidement. Ce régime dit critique est le régime limite entre le régime oscillant et le régime apériodique. (courbe3)

1-2-1-4. <u>Conclusion :</u>

La décharge libre (sans influence extérieur) d'un condensateur dans une bobine résistive produit des oscillations sinusoïdales amorties.

1-2-2. <u>Equation différentielle des oscillations libres amorties :</u>

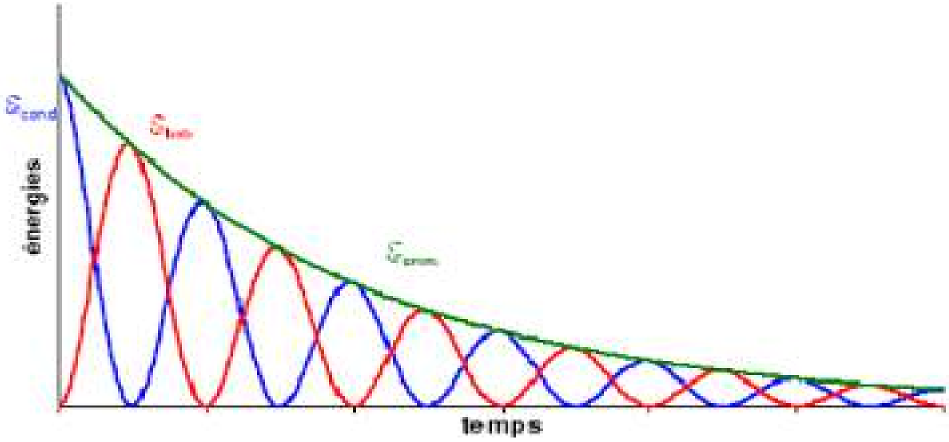


La loi des mailles donne: $u_c + u_R + u_L = 0$. Avec $i = \dfrac{dq}{dt}$, $u_L = L\dfrac{di}{dt}$, $u_R = Ri$ et $q = Cu_c$ on obtient:

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0}$$ (équation différentielle du second ordre sans second membre)

- Etude énergétique du régime pseudopériodique

  L'amplitude des oscillations diminue. L'énergie totale emmagasinée diminue : il y a perte d'énergie par effet Joule



$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = i\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right) = -Ri^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -Ri^2}$$

1-3. Analogie électromécanique :

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } q'' = \frac{d^2q}{dt^2}$$

SYSTEME		OSCILLATEUR MECANIQUE	CIRCUIT OSCILLANT
Non amorti	Équation différentielle	$x'' + \frac{k}{m}x = 0$	$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$
	Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
	Équation de l'oscillation	$x = x_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$q = Q_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$
	Énergie à l'instant t	$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ $E = cte$	$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $E = cte$
	Autres expressions de l'énergie d'oscillation	Énergie cinétique maximale: $E = \frac{1}{2}mv_m^2$ Énergie potentielle d'élasticité maximale: $E = \frac{1}{2}kx_m^2$	Énergie potentielle magnétique maximale: $E = \frac{1}{2}Li_m^2$ Énergie potentielle électrostatique maximale: $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$
Amorti	Équation différentielle*	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $-kx - \alpha v = mx''$ $mx'' + \alpha x' + kx = 0$	$\sum u = u_g$ $\frac{q}{C} + Ri = -L\frac{di}{dt}$ $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$
	*Les équations données ici à titre indicatif ne donnent pas lieu à une étude détaillée en S_2. Aucun exercice ne portera donc sur l'amortissement.		

Analogie entre les grandeurs mécaniques et électriques	m masse	$\Leftrightarrow$	L inductance
	k coefficient de raideur du ressort	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{C}$, C capacité du condensateur
	x élongation	$\Leftrightarrow$	q charge électrique
	v vitesse	$\Leftrightarrow$	i intensité
	F force	$\Leftrightarrow$	u tension

2. Oscillation électriques forcé en régime sinusoïdale, circuit RLC en série :

Un circuit RLC en série initialement chargé est le siège d'oscillations électriques libres mais amorties car le circuit dissipe de l'énergie par effet joule. Pour compenser ces pertes d'énergie on peut appliquer une tension sinusoïdale au circuit RLC: on a ainsi des oscillations électriques forcées.

2-5- Généralités sur le courant alternatif :

2-1-1. Définition :

Un courant alternatif est un courant électrique périodique qui change de sens deux fois par période et dont les variations dans un sens en fonction du temps sont identiques aux signes près aux variations dans l'autre sens.

Un courant alternatif sinusoïdal est un courant dont l'intensité est une fonction sinusoïdale du temps: $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ avec:

- I_m intensité maximale
- ω la pulsation imposée par le générateur
- $\omega t + \varphi$ phase à l'instant t
- φ phase à l'origine

2-1-2. Intensité efficace et tension efficace :

- Intensité efficace

  - l'intensité efficace d'un courant alternatif I_{eff} est égale à l'intensité I d'un courant continu qui passant dans un même conducteur de résistance R y produirait durant chaque période les mêmes effets caloriques: $W = RI^2T = RI_{eff}T$
  - considérons un dipôle AB de Résistance R parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de période T; si $\mathcal{P}$ est la puissance reçue par le conducteur pendant l'intervalle de temps dt, l'énergie reçue sera égale à $dw = \mathcal{P}dt = RI^2dt$. Durant une période T:
  $W = \int_0^T \mathcal{P}dt = \int_0^T RI^2 dt$.

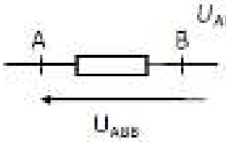
En prenant $\varphi = 0$ on obtient $i = I_m \sin(\omega t) \Rightarrow i^2 = I_m^2 \sin(\omega t)^2$ or $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

$$\Rightarrow W = \int_0^T RI_m^2 \sin^2(\omega t)dt = \int_0^T R\frac{I_m^2}{2}(1-\cos(2\omega t))dt$$

$\Rightarrow W = R\frac{I_m^2}{2}\int_0^T dt - R\frac{I_m^2}{2}\int_0^T \cos(2\omega t)dt \Rightarrow W = RI_m^2\frac{T}{2}$ or d'après la définition de I_{eff} on a

$$W = RI_{eff}^2T \Rightarrow W = RI_{eff}^2T = RI_m^2\frac{T}{2} \Rightarrow \frac{I_m^2}{2} = I_{eff}^2 \Rightarrow \boxed{I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$$

- <u>Tension efficace :</u>



$U_{AB} = RI \Rightarrow U_{max} = RI_m = RI_{eff}\sqrt{2} \Rightarrow U_{max} = U_{eff}\sqrt{2}$

$$\boxed{U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}}$$

<u>Remarque</u>: en courant alternatif l'ampèremètre et le voltmètre mesurent les valeurs efficaces, les valeurs maximales sont mesurées par l'oscilloscope.

- <u>Impédance d'un dipôle :</u>

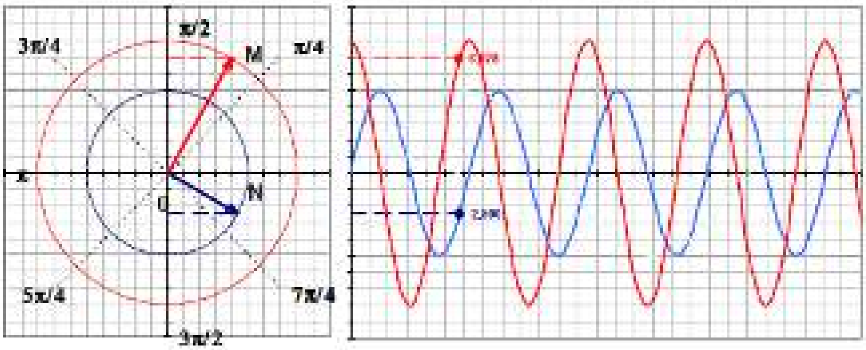
On définit l'impédance d'un dipôle Z le rapport: $\boxed{Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_{max}}{I_{max}}}$ Z s'exprime en ohm(Ω) et dépend de la fréquence du courant alternatif.

L'inverse de l'impédance $\boxed{y = \frac{1}{Z}}$ est appelé admittance, elle s'exprime en siemens (symbole S)

2-6- <u>Présentation de Fresnel :</u>

<u>2-2-1. principe:</u>

- Considérons un vecteur $\overline{OM}$ de module a qui tourne dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ autour de son origine O avec une vitesse angulaire ω constante. Si à $t=0$ l'angle $(\overrightarrow{OM},\vec{i}) = \varphi$ est la phase à l'origine et à un instant t quelconque la phase est l'angle $\omega t + \varphi = (\overrightarrow{OM},\vec{i})$. Projetons l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $\vec{j}$, la valeur algébrique de la projection est à l'instant t $y = a\sin(\omega t + \varphi)$



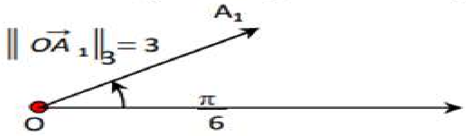
Dans l'exemple: $\overline{OM} = 8\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\overline{ON} = 5.\sin(\omega t)$

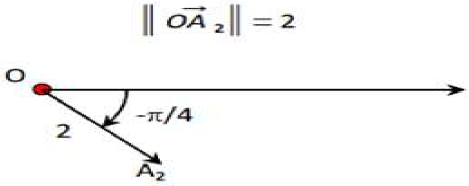
Le mouvement de la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Oy est en mouvement sinusoïdal d'amplitude $a = \|\overrightarrow{OM}\|$ de pulsation ω (vitesse angulaire du vecteur tournant $\overrightarrow{OM}$) et de phase à l'origine $\varphi = (\overrightarrow{OM},\vec{i})$ à $t = 0$.

Réciproquement on peut faire correspondre un vecteur tournant à toute fonction sinusoïdale $y = a.\sin(\omega t + \varphi)$. Par convention on représente la fonction y par un vecteur tournant $\overrightarrow{OM}$ dans sa position initiale.

Exemples: représentons les vecteurs tournant associés aux fonctions sinusoïdales:

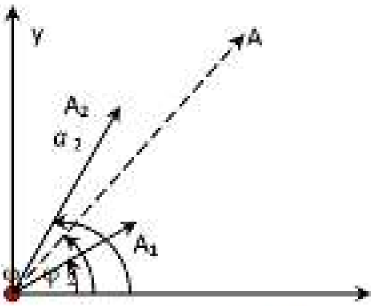
$y_1 = 3\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ et $y_2 = 2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \vec{OA_1} = \left(3\ ;\ \frac{\pi}{6}\right)$ et $\vec{OA_2} = \left(2\ ;\ -\frac{\pi}{4}\right)$

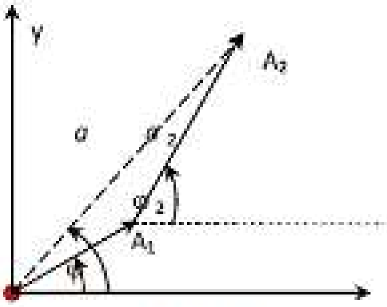




2-2-2. somme de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation :

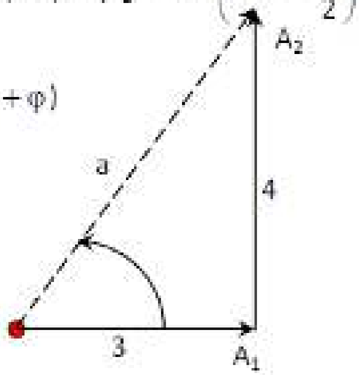
Soient $y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = a_2\sin(\omega t + \varphi_2)$. Déterminons la somme $y = y_1 + y_2$





$y = y_1 + y_2 = a.\sin(\omega t + \varphi)$ où a et φ sont des constantes déterminées par le calcul ou graphiquement.

Application: déterminer la somme $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 = 3\sin(\omega t)$ et $y_2 = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$



On pose: $\left\| \vec{OA_1} \right\| = 3$; $\left\| \vec{OA_2} \right\| = 4$ et $y = y_1 + y_2 = a \times \sin(\omega t + \varphi)$

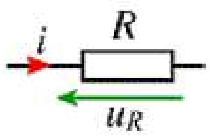
$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\tan\varphi = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = 0{,}93$ rad d'où $y = 5 \times \sin(\omega t + 0{,}93)$

2-7- Etude de quelques dipôles en courant alternatif :

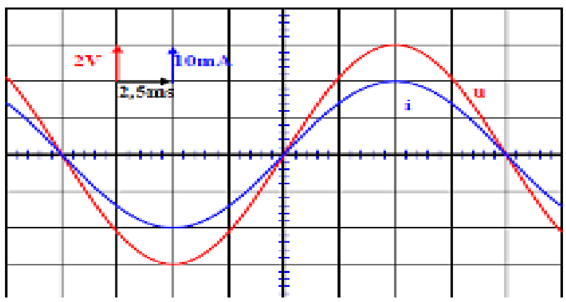
2-3-1. Résistor :

On pose $i = I_m \sin\omega t$ donc $u = $



$U_m = RI_m \Rightarrow \boxed{Z = \frac{U_m}{I_m} = R}$

.i et u sont en phase, le déphasage est $\boxed{\varphi = 0}$

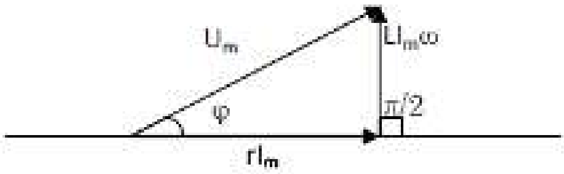


Résistor de Résistance R = 300Ω

2-3-2.Bobine (R,L)

$i = I_m \sin\omega t \Rightarrow u_L = ri - e = ri + L\dfrac{di}{dt}$

$u_L = rI_m \sin\omega t + LI_m\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$



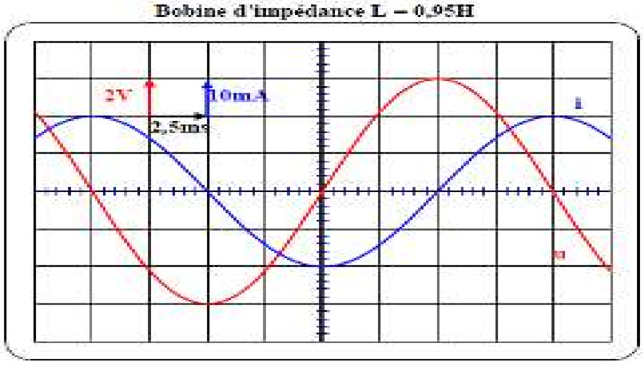
Théorème de Pythagore: $U_m^2 = r^2 I_m^2 + L^2 I_m^2 \omega^2$ d'où l'impédance: $\boxed{Z = \dfrac{U_m}{I_m} = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}$ et

$$\tan\varphi = \frac{L\omega I_m}{rI_m} = \frac{L\omega}{r} \Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega}{r}}$$

u et i sont déphasés: u est en avance de φ sur i

<u>Remarque</u>: le terme $L\omega$ est appelé réactance d'induction. Elle s'exprime en Ω.

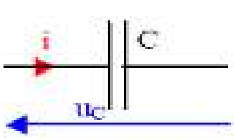
Bobine d'impédance L = 0,95H



On détermine graphiquement le déphasage par la relation: $\begin{cases} 2\pi \rightarrow T \\ \varphi \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = \dfrac{2\pi t}{T}}$

<u>Exemple</u>: $\varphi = \dfrac{2\pi 2}{8} = \dfrac{\pi}{2}$ (bobine pure r=0)

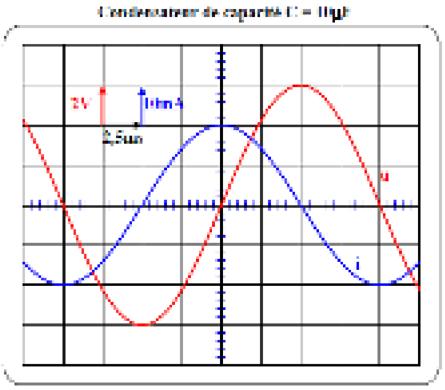
<u>2-3-3. capacité</u>



$i = I_m \sin\omega t;\ u_C = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C}\int i dt = -\dfrac{I_m}{C\omega}\cos\omega t = \dfrac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

on a $U_m = \dfrac{I_m}{C\omega}$ d'où $\boxed{Z = \dfrac{1}{C\omega}}$

u et i sont déphasés: u est en retard de $\dfrac{\pi}{2}$ sur i $\boxed{(\varphi = -\dfrac{\pi}{2})}$

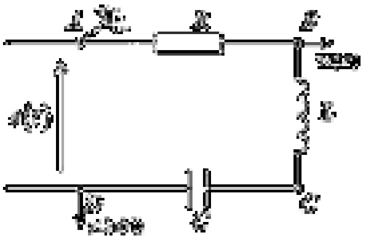


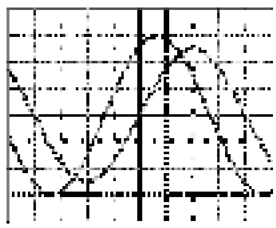
Remarque: la grandeur $\frac{1}{C\omega}$ s'exprime en Ω, elle est appelée réactance de capacité.

2-8- Circuit (RLC) série en régime sinusoïdale forcé:

2-4-1. oscillations forcés :

- Excitation: Un générateur excite un circuit RLC avec une tension alternative sinusoidale u_g de fréquence variable.
- Réponse: Le circuit répond à cette excitation par un courant alternatif d'intensité i, dont nous visualisons à l'aide de la courbe de u_R.
- En même temps, nous visualisons les courbes de u_g (inversée) et i en fonction du temps à l'aide d'un oscillographe.

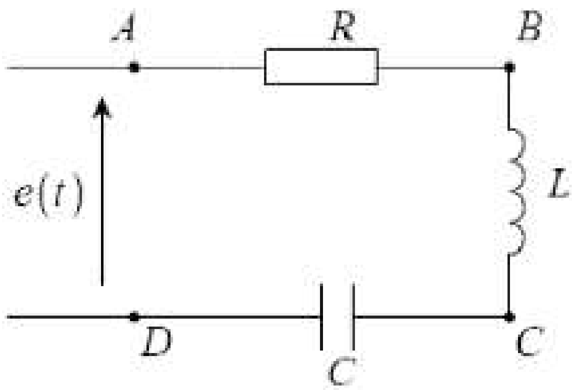




- les deux sinusoïdes ont la même période et déphasées
- l'une représente la tension imposée par le GBF et l'autre représente les variations de l'intensité du courant (u=Ri)
- le circuit oscille avec une pulsation imposée par le générateur souvent différente de la pulsation propre ω_0: les oscillations sont forcées.

2-4-2.impédance et déphasage du dipôle RLC:

- Equation différentielle :



La loi d'additivité des tensions: $u_{AD} = u_{AB} + u_{BC} + u_{CD}$

$$u_{AB} = Ri = R\frac{dq}{dt}\ ;\ u_{BC} = -e = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}\ ;\ u_{CD} = \frac{q}{C}$$

$\Rightarrow \boxed{e(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}}$ équation différentielle d'un circuit RLC

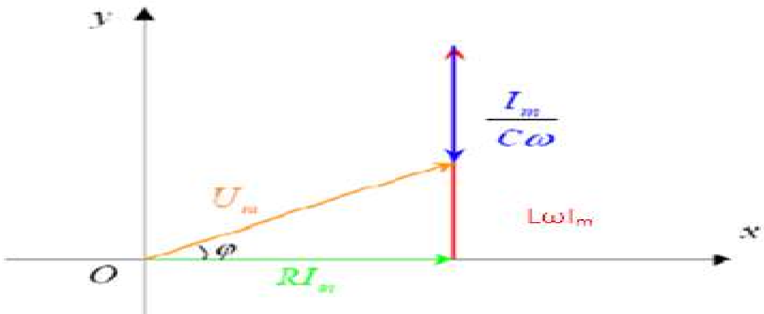
- <u>Impédance du circuit RLC :</u>

$$e(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt$$

on pose $i = I_m \sin\omega t$ et $e(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

$$\frac{di}{dt} = I_m\omega\cos\omega t = I_m\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);\ \int idt = -\frac{I_m}{\omega}\cos\omega t = \frac{I_m}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt \Rightarrow \boxed{U_m\sin(\omega t + \varphi) = LI_m\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + RI_m\sin\omega t + \frac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$



Théorème de Pythagore: $U_m^2 = (RI_m)^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow U_m = I_m\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ d'où

l'impédance: $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$

<u>Remarque</u>: le terme $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est appelé réactance du circuit RLC.

- <u>Déphasage :</u>

$$\cos\varphi = \frac{RI_m}{U_m} = \frac{RI_m}{ZI_m} = \frac{R}{Z} \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}}$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}}{RI_m} \Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{L}{R}\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}}$$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre

Remarque:

- si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ ($\omega>\omega_0$) l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité: $\tan\varphi>0 \Rightarrow \sin\varphi>0$ donc $\varphi > 0$: u est en avance de φ sur i.
- si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ ($\omega<\omega_0$) l'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance : $\tan\varphi<0 \Rightarrow \sin\varphi<0$ donc $\varphi < 0$: u est en retard de φ sur i.
- si $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ ($\omega=\omega_0$) $\tan\varphi=0 \Rightarrow \sin\varphi=0$ donc $\varphi = 0$: u et i sont phase: c'est la résonance.

2-4-3. Résonance d'intensité :

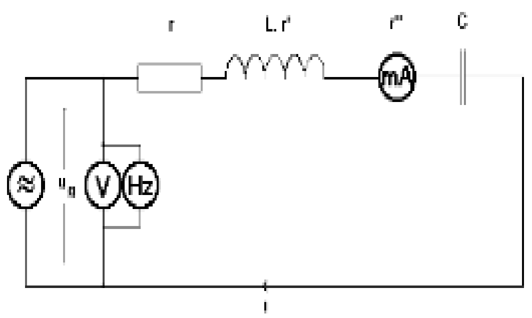
Lorsqu'on varie la fréquence du générateur, on observe deux sinusoïdes de même fréquence mais on remarque que l'amplitude de la sinusoïde visualisant i passe par un maximum puis décroit. La fonction I=f(ω) ou I=f(N) passe par un maximum pour $\omega=\omega_0$: c'est la résonance d'intensité. On dit que le dipôle RLC est un résonateur et le générateur un excitateur.

Propriétés de la résonance

A la résonance I est maximale ($I = \frac{U}{Z}$) c'est-à-dire donc Z minimale. $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ est minimale si $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$; $\omega = \omega_0 \Rightarrow$ Z=R et $\tan\varphi=0$

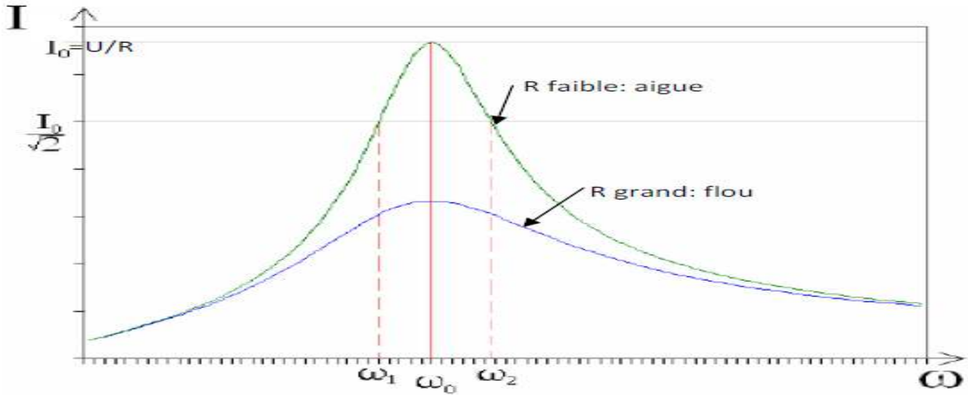
A la résonance $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Z = R$, $\varphi=0$, u et i sont en phase

2-4-4. Courbe de résonance d'intensité :



On pose: $R = r + r'$

En maintenant U constante, faisons varier ω ou la fréquence N et relevons à l'aide de l'ampèremètre les différentes valeurs de I. Traçons la courbe $I=f(\omega)$



Cette courbe est appelée courbe de résonance. $\omega_0=2\pi N_0$ est la fréquence de résonance, où I est à son maximum $\boxed{I_0=\frac{U}{R}}$.

2-4-5. Bande passante :

La bande passante à "trois décibels", ou encore à 3dB, du dipôle RLC est l'intervalle de fréquence pour lequel $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Les pulsations ω_1 et ω_2, limites de la bande passante à 3dB, sont telles que: $I(\omega_1)=I(\omega_2)=\frac{I_0}{\sqrt{2}}$. La largeur de la bande passante à 3 dB est égale à: $\boxed{\Delta\omega=\omega_2-\omega_1}$.

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}=\frac{U}{R\sqrt{1+\left(\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}}=\frac{I_0}{\sqrt{1+\left(\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}}$$

ω_1 et ω_2 sont définis par $I(\omega)=\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ on a donc:

$$\sqrt{1+\left(\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}=\sqrt{2}\Rightarrow\left(\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2=1\Rightarrow\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}=\pm1$$

$$L\omega-\frac{1}{C\omega}=R\ \ (1) \qquad \text{ou} \qquad L\omega-\frac{1}{C\omega}=-R\ \ (2)$$

$(1)\Rightarrow LC\omega^2-RC\omega-1=0\Rightarrow\Delta=R^2C^2+4LC>0\Rightarrow\omega=\frac{RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}$ et $\omega'=\frac{RC-\sqrt{\Delta}}{2LC}$ (à rejeter car négatif)

$(2)\Rightarrow LC\omega^2+RC\omega-1=0\Rightarrow\Delta=R^2C^2+4LC>0\Rightarrow\omega''=\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}$ et $\omega'''=\frac{-RC-\sqrt{\Delta}}{2LC}$ (à rejeter car négatif)

On a donc $\omega_1=\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}$ et $\omega_2=\frac{RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}$ et enfin $\omega_2-\omega_1=\frac{2RC}{2LC}\Rightarrow\boxed{\Delta\omega=\frac{R}{L}}$

On a aussi $\Delta\omega=2\pi\Delta N\Rightarrow\boxed{\Delta N=\frac{R}{2\pi L}}$

La largeur de la bande passante ne dépend que des caractéristiques du dipôle RLC.

2-4-6. Facteur de qualité :

L'acuité des courbes de résonances est caractérisée par le facteur de qualité Q du circuit.

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0}} \text{ (sans unité)}$$

Plus Q est petit, plus la courbe est large et que le circuit est moins sélectif.

2-4-7. Phénomène de surtension :

La tension maximale du condensateur à la résonance est $U_c = \frac{I_0}{C\omega_0}$ or $I_0 = \frac{U}{R}$

$$\Rightarrow \quad U_C = \frac{U}{RC\omega_0} \quad \Rightarrow \boxed{U_C = QU}$$

La tension maximale aux bornes de la bobine à la résonance est: $U_b = L\omega_0 I_0 = L\frac{U}{R}\omega_0\frac{\omega_0}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \quad U_b = \frac{U}{RC\omega_0} \Rightarrow \boxed{U_b = QU}$$

On observe un phénomène de surtension aux bornes du condensateur et de la bobine à la résonance. L'amplitude U_C de la tension aux bornes du condensateur est très supérieure à celle délivrée par le générateur.

2-9- Puissance en courant alternatif

2-9-1. Puissance instantanée :

La définition de la puissance instantanée reçue par un dipôle est la même que celle de la puissance en régime continu. Pour un dipôle (AB) quelconque, la puissance instantanée reçue est définie par:

$$\boxed{p(t) = u_{AB}(t)i_{AB}(t)}$$

en régime sinusoïdal, on a $i(t) = I_m\cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$, on a donc:

$$\boxed{p(t) = U_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)}$$

p(t) est donnée par le produit de deux fonctions sinusoïdales. On peut utiliser les relations trigonométriques pour se ramener à une somme de sinusoïdes.

$$\begin{cases}\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b\\ \cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b\end{cases} \Rightarrow \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a.\cos b$$

$$\begin{cases}a = \omega t\\ b = \omega t + \varphi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b = 2\omega t + \varphi\\ a-b = -\varphi\end{cases} \text{ donc on a}$$

$$\boxed{p(t) = U_m I_m[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)]}$$

On constate que p(t) est la somme de deux termes: un terme sinusoïdal mais de fréquence double et un terme constant.

2-9-2. Puissance moyenne :

$$< p > = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_m I_m}{2}[\cos(\omega t+\varphi)+\cos\varphi]dt = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{< p > = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi}$$

Cette puissance est appelée puissance active

$\frac{U_m I_m}{2}$: Puissance apparente en VA(volt-Ampère)

$\cos\varphi$: facteur de puissance (sans unité)

- cas d'un résistor

$$\begin{cases} U_m = RI_m \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow < p > = \frac{RI_m^2}{2}$$

On définit les grandeurs efficaces à partir de cette relation: l'intensité efficace est l'intensité qui devrait parcourir R en courant continu pour obtenir le même dégagement de chaleur (même énergie dissipée)

$$I^2_{eff} = \frac{I^2_m}{2} \Rightarrow I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- cas d'une bobine parfaite

$$\begin{cases} U_m = Z_L I_m = L\omega I_m \\ \varphi = +\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow < P > = \frac{L\omega I_m^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

on constate donc qu'une bobine parfaite ne consomme pas d'énergie.

- cas d'un condensateur

$$\begin{cases} U_m = Z_C I_m = \frac{I_m}{C\omega} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow < P > = \frac{I_m^2}{2C\omega}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

un condensateur ne consomme pas d'énergie.

Attention, la puissance instantanée reçue par un condensateur ou une bobine n'est toujours pas nulle.

$$p_L(t) = \frac{U_m I_m}{2}\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } p_C(t) = \frac{U_m I_m}{2}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Lorsqu'une bobine et un condensateur sont en série dans un circuit, leurs puissances sont en opposition de phase. Quand $p_L(t)$ est à son maximum, $p_C(t)$ est à son minimum, et inversement.

Dans un circuit RLC, la bobine et le condensateur vont échanger de l'énergie. Ces échanges d'énergie seront d'autant plus forts que la pulsation imposée par le GBF sera proche de la fréquence propre du circuit $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$: c'est le phénomène de résonance.

2-5-3. Importance du facteur de puissance

Une installation électrique alimentée par le réseau SENELEC est caractérisée :

- D'une part, par la valeur de la tension efficace,
- D'autre part, par la valeur efficace du courant d'utilisation.

Les fils de l'installation s'échauffent par effet joule : si l'on excède le courant efficace maximal d'utilisation les fils s'échauffent exagérément.

En pratique, un disjoncteur et des fusibles protègent l'installation contre les surintensités intempestives ou accidentelles.

Il existe aussi ce qu'on appelle les pertes en ligne. (Énergie perdue par effet joule dans les câbles).

- ✓ Si P est la puissance électrique moyenne consommée par une installation, cosφ le facteur de puissance de cette installation l'intensité efficace du courant en ligne est $I=p/U \cos\varphi$.
- ✓ Si R est la résistance totale en ligne, la puissance moyenne perdue en ligne est $P=RI^2= RP^2/U^2 (\cos\varphi)^2$

Conclusion :

L'effet joule en ligne est d'autant plus grand que **le facteur de puissance de l'installation est faible.** Vice versa

C'est pourquoi les contrats d'abonnements industriels imposent aux usagers une valeur élevée du facteur de puissance.

Remarque :

Un condensateur branché en dérivation aux bornes de chaque moteur de l'installation permet d'améliorer le facteur de puissance de l'installation.

2-6- Applications pratique:
Filtre radio, transport d'énergie